PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures - Coefficient : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLEME

On note $C([-1,1])$ l'algèbre des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs complexes, $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients complexes, et, pour tout entier $n\geq 0$, $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On identifiera les polynômes aux fonctions polynômiales sur $[-1,1]$.

On munit $C([-1,1])$ de la norme

$$f \longmapsto ||f|| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs est dominée à l'ordre k, où k est entier strictement positif, s'il existe un nombre réel $M>0$ tel que, pour tout $n>0$, $\alpha_n \leq \frac{M}{n^k}$; on dit que (α_n) est à décroissance rapide si elle est dominée à tout ordre k. Enfin, on dit que (α_n) est à décroissance exponentielle s'il existe un nombre réel r appartenant à $]0,1[$ et un nombre réel M strictement positif tels que, pour tout $n\geq 0$, $\alpha_n \leq Mr^n$.

Pour tout entier $k>0$, on note E_k le sous-espace de $C([-1,1])$ constitué des fonctions f satisfaisant à la condition suivante : il existe une suite (P_n) de polynômes tels que, pour tout n, $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$, et que $||f-P_n||$ soit dominée à l'ordre k. De même, on note E_∞ (resp. E_ω) le sous-espace constitué des fonctions f satisfaisant à la condition suivante : il existe une suite (P_n) de polynômes tels que, pour tout n, $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$, et que $||f-P_n||$ soit à décroissance rapide (resp.exponentielle).

Dans la partie I, on caractérise les éléments de E_∞ et de E_ω à l'aide du développement en série de Tchebyschev et on établit que toute fonction de classe C^∞ appartient à E_∞.

Dans la partie II, on étudie le problème réciproque, et on relie l'appartenance à E_ω à l'analyticité de f, en utilisant l'interpolation de Tchebyschev.

I - DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SERIE DE TCHEBYSCHEV.

1. POLYNOMES DE TCHEBYSCHEV.

a) Prouver que, pour tout entier $p\geq 0$, il existe un élément T_p et un seul de $\mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout nombre réel t,

$$T_p(\cos t)=\cos pt.$$

Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

b) Etablir que, pour tout entier $p\geq 0$,

$$T_{p+2}=2XT_{p+1}-T_p.$$

En déduire que T_p est à coefficients entiers ; déterminer le degré et le coefficient dominant de T_p.

Etudier la parité de T_p.

c) Prouver que, pour tout $p\geq 0$, $||T_p||=1$.

d) Prouver que, pour tout nombre complexe $z\neq 0$,

$$T_p\left(\tfrac{1}{2}(z+\tfrac{1}{z})\right) = \tfrac{1}{2}\left(z^p+\frac{1}{z^p}\right).$$

En déduire que, pour tout nombre réel t,

$$T_p(\operatorname{ch} t)=\operatorname{ch} pt,$$

puis que, pour tout élément x de $[1,+\infty[$,

$$1\leq T_p(x)\leq (x+\sqrt{x^2-1})^p.$$

2. SERIE DE FOURIER D'UNE FONCTION CONTINUE 2π-PERIODIQUE.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{C}$ l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques à valeurs complexes, et on munit $\mathcal{C}$ de la norme

$$\varphi \longmapsto N_\infty(\varphi)= \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |\varphi(t)|.$$

Pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, on note $c_p(\varphi)$ le $p^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de φ, défini par

$$c_p(\varphi)= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)e^{-ipu}du,$$

et, pour tout entier $n\geq 0$, on note $S_n(\varphi)$ la somme de Fourier de φ à l'ordre n, définie par

$$S_n(\varphi)(t)= \sum_{|p|\leq n} c_p(\varphi)e^{ipt}.$$

A SUIVRE

On rappelle que $S_n(\varphi)$ converge vers φ en moyenne quadratique, c'est-à-dire que $N_2(\varphi - S_n(\varphi))$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, où N_2 est la norme sur $\mathcal{C}$ définie par

$$N_2(\psi)=(\psi|\psi)^{1/2}, \text{ où } (\psi|\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\psi(t)|^2dt.$$

Lorsque φ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, on note $D^k\varphi$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ de φ.

a). Soit φ un élément de $\mathcal{C}$ tel que les séries $\sum_{p=0}^{+\infty}|c_p(\varphi)|$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}|c_{-p}(\varphi)|$ sont convergentes.

Pour tout nombre réel t, on pose

$$\psi(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}c_p(\varphi)e^{ipt}+\sum_{p=1}^{+\infty}c_{-p}(\varphi)e^{-ipt}.$$

Etablir que $S_n(\varphi)$ converge vers ψ uniformément sur $[-\pi,+\pi]$; En déduire que $\psi=\varphi$.

Prouver ainsi, que, pour tout $n\geq 0$,

(1) $$N_\infty(\varphi-S_n(\varphi))\leq\sum_{p=n+1}^{+\infty}|c_p(\varphi)|+\sum_{p=n+1}^{+\infty}|c_{-p}(\varphi)|.$$

b) Pour tout $n\geq 0$, on note $\mathcal{C}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ engendré par les fonctions $t\mapsto e^{ipt}$, où $|p|\leq n$.

Prouver que, pour tout élément ψ de $\mathcal{C}$ et pour tout p, $|c_p(\psi)|\leq N_\infty(\psi)$. En déduire que, pour tout élément φ de $\mathcal{C}$, pour tout $p\neq 0$, et pour tout élément Q de $\mathcal{C}_n$, où $n<|p|$,

(2) $$|c_p(\varphi)|\leq N_\infty(\varphi-Q).$$

c) On suppose que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Lorsque p est un entier non nul, exprimer $c_p(\varphi)$ en fonction de $c_p(D\varphi)$. En déduire que φ satisfait aux conditions énoncées au a).

d) On suppose que φ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, où $k\geq 1$. Prouver que, pour tout entier $p\neq 0$,

(3) $$|c_p(\varphi)|\leq\frac{N_\infty(D^k\varphi)}{|p|^k}.$$

e) On suppose que φ est une fonction <u>paire</u> appartenant à $\mathcal{C}$. Prouver que $c_{-p}(\varphi)=c_p(\varphi)$.

En déduire que, pour tout $n>0$, et pour tout nombre réel t.

$$S_n(\varphi)(t)=c_0(\varphi)+\sum_{p=1}^{n}2c_p(\varphi)\cos pt.$$

3. <u>SERIE DE TCHEBYSCHEV D'UNE FONCTION CONTINUE SUR $[-1,1]$</u>.

Dans toute la suite, on note W l'application linéaire de $C([-1,1])$ dans $\mathcal{C}$ qui à tout élément f associe la fonction continue 2π-périodique paire φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=f(\cos t)$.

Pour tout entier $p\geq 0$, on pose

$a_p(f)=2c_p(Wf)$ si $p\neq 0$ et $a_0(f)=c_0(Wf)$; $a_p(f)$ s'appelle le $p^{\text{ième}}$ coefficient de Tchebyschev de f.

Pour tout entier $n\geq 0$, on pose

$$U_n(f)=\sum_{p=0}^{n}a_p(f)T_p.$$

a) Prouver que W est injective et que, pour tout élément f de $C([-1,1])$,

$$N_\infty(Wf)=||f||.$$

b) Déterminer l'image par W de $\mathbb{C}_n[X]$.

En déduire que U_n est un projecteur de $C([-1,1])$ dont l'image est $\mathbb{C}_n[X]$.

c) Etablir que, pour tout $n\geq 0$, $W(U_n(f))=S_n(Wf)$.

d) Démontrer que, si la série $\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p(f)|$ converge, alors, pour tout élément x de $[-1,1]$,

(4) $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_p(f)T_p(x)$, cette série est normalement convergente sur $[-1,1]$, et, pour tout $n\geq 0$,

(5) $$||f-U_n(f)||\leq\sum_{p=n+1}^{+\infty}|a_p(f)|.$$

e) Prouver que, si f est de classe C^1 sur $[-1,1]$, les conditions du d) sont satisfaites.

f) On suppose donnée une suite (P_n) de polynômes tels que, pour tout $n\geq 0$, $P_n\in\mathbb{C}_n[X]$ et que $||f-P_n||$ converge vers 0. Prouver que, pour tout entier $p\neq 0$,

(6) $$|a_p(f)|\leq 2||f-P_{p-1}||.$$

Tournez la page S.V.P.

4. CARACTERISATION DES ELEMENTS DE E_∞ ET DE E_ω.

a) On suppose que $|a_p(f)|$ est dominée à l'ordre k, où $k\geqslant 2$, c'est-à-dire que $|a_p(f)|\leqslant \frac{M}{p^k}$, pour $p\neq 0$.

A l'aide de (5), en déduire que, pour tout $n\geqslant 1$,

$$||f-U_n(f)||< \frac{1}{k-1}\frac{M}{n^{k-1}}.$$

Par suite $||f-U_n(f)||$ est dominée à l'ordre k-1, et, en particulier, f appartient à E_{k-1}.

b) Inversement, on suppose que f appartient à E_k, $k\geqslant 1$. A l'aide de (6), en déduire que $|a_p(f)|$ est dominée à l'ordre k.

c) Caractérisation des éléments de E_∞

Soit f un élément de $\mathcal{C}([-1,1])$. Prouver qu'il est équivalent de dire :

α) La fonction f appartient à E_∞.

β) La suite $|a_p(f)|$ est à décroissance rapide.

γ) La suite $||f-U_n(f)||$ est à décroissance rapide.

d) Caractérisation des éléments de E_ω.

Soit f un élément de $\mathcal{C}([-1,1])$. Prouver qu'il est équivalent de dire :

α') La fonction f appartient à E_ω.

β') La suite $|a_p(f)|$ est à décroissance exponentielle.

γ') La suite $||f-U_n(f)||$ est à décroissance exponentielle.

5. APPARTENANCE A E_∞ DES FONCTIONS DE CLASSE C^∞

a) Soit f une fonction de classe C^k sur $[-1,1]$, où $k\geqslant 1$. Prouver que $|a_p(f)|$ est dominée à l'ordre k.

b) Prouver que si f est de classe C^∞, alors f appartient à E_∞.

6. APPARTENANCE A E_ω DES FONCTIONS DEVELOPPABLES EN SERIE ENTIERE.

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$, où $R>1$. Prouver que f appartient à E_ω.

II - INTERPOLATION DE TCHEBYSCHEV.

Soit p un entier naturel non nul. Dans toute la suite de cette partie, pour tout entier j tel que $0\leqslant j\leqslant p$, on pose $\theta_j=(p-j)\frac{\pi}{p}$ et $\alpha_j=\cos\theta_j$. La suite $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ est alors une subdivision de $[-1,1]$ rangée dans l'ordre strictement croissant.

1. VARIATIONS DE T_p.

a) Calculer $T_p(\alpha_j)$ et, en particulier, $T_p(1)$ et $T_p(-1)$.

b) Déterminer tous les éléments x de $[-1,1]$ tels que $|T_p(x)|=1$. En déduire la valeur de $T'_p(\alpha_j)$ lorsque $p\geqslant 2$ et $1\leqslant j\leqslant p-1$.

c) Prouver que, pour tout élément t de $]0,\pi[$,

$$T'_p(\cos t)= p\frac{\sin pt}{\sin t}.$$

Retrouver ainsi la valeur de $T'_p(\alpha_j)$ lorsque $1\leqslant j\leqslant p-1$ et déterminer $T'_p(1)$ et $T'_p(-1)$.

2. EQUATION DIFFERENTIELLE SATISFAITE PAR T_p.

a) Montrer que T_p est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(x^2-1)T''_p - xT'_p - p^2T_p=0$$

(On se placera d'abord sur $[-1,1]$).

b) Par dérivations successives, en déduire que, pour tout $p\geqslant 1$ et pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant p$,

$$D^kT_p(1)=\frac{p^2(p^2-1^2)(p^2-2^2)\ldots(p^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}.$$

En déduire que

$$|D^kT_p(1)|\leqslant 2^k\frac{k!}{(2k)!}\frac{(p+k)!}{(p-k)!}.$$

3. INTERPOLATION DE TCHEBYSCHEV.

Soit p un entier strictement positif.

Pour tout entier j tel que $0\leqslant j\leqslant p$,

on pose $$L_j(X)=\prod_{i\neq j}\frac{X-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i}.$$

A SUIVRE

a) Prouver que $(L_j)0\leq j\leq p$ est une base de $\mathbb{C}_p[X]$ et que, pour tout élément P de $\mathbb{C}_p[X]$,

(7) $$P(X)=\sum_{j=0}^{p}P(\alpha_j)L_j(X).$$

En particulier,

(8) $$T_p(X)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}L_j(X).$$

b) Prouver que, pour tout élément x de $[1,+\infty[$, $(-1)^{p-j}L_j(x)\geq 0$; en déduire que

(9) $$\sum_{j=0}^{p}|L_j(x)|=T_p(x).$$

c) En déduire que, pour tout élément P de $\mathbb{C}_p[X]$, où $p\geq 0$, et pour tout élément x de $[1,+\infty[$,

$$|P(x)|\leq T_p(x)||P||.$$

4. MAJORATION DES DERIVEES SUCCESSIVES D'UN POLYNOME SUR $[1,+\infty[$.

Soit k un entier tel que $1\leq k\leq p$.

a) Montrer, par récurrence sur k, que D^kL_j admet exactement p-j zéros réels et que ces zéros appartiennent à $]-1,1[$. En déduire que, pour tout $x\geq 1$, $(-1)^{p-j}D^kL_j(x)>0$.

b) En dérivant les relations (7) et (8), montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}_p[X]$, et pour tout $x\geq 1$,

$$|D^kP(x)|\leq D^kT_p(x)||P||.$$

5. MAJORATION DES DERIVEES SUCCESSIVES D'UN POLYNOME SUR $[-1,1]$.

a) Soit λ un élément de $[0,1]$. Pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$ on pose

$$P_\lambda(X)=P(\tfrac{1+\lambda}{2}X+\tfrac{\lambda-1}{2}).$$

Déterminer l'image de $[-1,1]$ par l'application affine $x\mapsto\frac{1+\lambda}{2}x+\frac{\lambda-1}{2}$. En déduire que $||P_\lambda||\leq||P||$.

b) Exprimer D^kP_λ en fonction de D^kP.

c) En déduire, que pour tout élément P de $\mathbb{C}_p[X]$ et pour tout k tel que $1\leq k\leq p$,

$$|D^kP(\lambda)|\leq(\tfrac{2}{1+\lambda})^kD^kT_p(1)||P||.$$

d) Inégalités de Markov.

Prouver que, pour tout élément P de $\mathbb{C}_p[X]$, (10) $||DP||\leq 2p^2||P||$,

et que, pour tout k tel que $1\leq k\leq p$, (11) $||D^kP||\leq 2^{2k}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(p+k)!}{(p-k)!}||P||$.

6. REGULARITE DES FONCTIONS DE E_∞.

a) Soit f un élément de E_{2k+2}, où $k\geq 0$.

Montrer que, pour tout élément x de $[-1,1]$, $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_p(f)T_p(x)$,

cette série étant normalement convergente sur $[-1,1]$.

En utilisant l'inégalité (10) de façon itérée, prouver que f est de classe C^k sur $[-1,1]$ et que D^kf s'obtient en dérivant k fois cette série terme à terme.

b) Soit f un élément de $\mathcal{C}([-1,1])$. Montrer qu'il est équivalent de dire :

α) La fonction f appartient à E_∞.

β) La fonction f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.

7. REGULARITE DES ELEMENTS DE E_ω.

Soit f un élément de E_ω. On sait qu'il existe un nombre réel r appatenant à $]0,1[$ et un nombre réel M strictement positif tel que, pour tout $p\geq 0$, $|a_p(f)|\leq Mr^p$.

a) Prouver que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et que pour tout entier $k\geq 0$ et pour tout élément x de $[-1,1]$,

$$D^kf(x)=\sum_{q=0}^{+\infty}a_{q+k}(f)D^kT_{q+k}(x).$$

b) A l'aide de l'inégalité de Markov (11), en déduire que

$$|D^kf(x)|\leq\frac{M}{1-r}\left(\frac{4r}{(1-r)^2}\right)^k k!$$

c) On pose $\alpha(r)=\frac{(1-r)^2}{4r}$. Prouver que, pour tout point a de $[-1,1]$ la série de Taylor de f au point a converge vers f sur $]a-\alpha(r),a+\alpha(r)[\cap[-1,1]$, c'est-à-dire que pour tout point x de cet intervalle,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{D^kf(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Remarque. Réciproquement, si f satisfait à une condition de ce type, où $\alpha(r)$ est remplacé par un nombre $\alpha>0$, alors f appartient à E_ω. On ne demande pas de prouver ce résultat.

FIN